cuno

Mathematik

Besser im...

...Arbeiten mit Zehnerpotenzen und Einheiten

Wie kommt man überhaupt darauf Zehnerpotenzen zu benutzen und Vorsätze vor Einheiten zu schreiben? Lesen Sie diese Zahlen einmal laut:

Masse der Erde	5974000000000000000000000000 g
Ladung eines Elektrons	0,00000000000000000016726485 C

Gar nicht so einfach oder? Aber auch schon bei einer sehr gebräuchlichen Einheit wie dem Meter stößt man schnell auf viele Nullen. Wann macht es Sinn einen Vorsatz vor der Grundeinheit zu benutzen?

Stärke einer Plastikfolie	0,00001 m
Höhe einer Wohnungstür	2 m
Entfernung Erde-Sonne	149500000000 m

Möchten Sie dies einmal in Bildern verdeutlicht haben? Schauen Sie im Internet auf http://microcosm.web.cern.ch/Microcosm/P10/german/P0.html. (Fragen Sie ihren Ansprechpartner, falls Sie zu Hause keine Möglichkeit haben ins Internet zu gelangen.) Sie werden staunen!

1. Schreiben Sie die 5 oben stehenden Angaben in einer für Sie sinnvollen Schreibweise auf!

2. Wie groß sind die Faktoren vor ihren Zehnerpotenzen? Wissenschaftler haben sich weltweit darauf verständigt nur Faktoren zwischen 0 und 9 zu verwenden. Versuchen Sie dies zu erklären! Ist diese Einschränkung immer sinnvoll?

3. Häufig müssen bei technischen Anwendungen Angaben in Zehnerpotenzschreibweise zusammengefasst werden. Wie wurde in folgenden Beispielen vorgegangen?

$10^{2} \bullet 10^{5} = 10^{2+5} = 10^{7}$

$10^{3} \bullet 10^{-4} = 10^{3-4} = 10^{-1}$

$10^{3} \bullet \frac{1}{10^{2}} = 10^{3} \bullet 10^{-2} = 10$

4. Rechnen Sie die Aufgaben aus 3. mit dem Taschenrechner. Welche Tasten verwenden Sie in welcher Reihenfolge? Wie sieht jeweils die Anzeige im Display aus? Ein Beispiel für die erste Aufgabe:

Eingabe	1	EE	2	•	1	EE	5	=
Anzeige	1	1^{00}	1^{02}	100	1	1^{00}	1^{05}	10000000

Die Tasten sind bei jedem Taschenrechner unterschiedlich. Nehmen Sie sich Zeit die Bedienung Ihres Taschenrechners genau kennen zu lernen. So vermeiden Sie Fehler beim Rechnen!

Probieren Sie auch einmal diese Aufgaben:

$$10^{9}\bullet 10^{12}=10^{9+12}=10^{21} \qquad 10^{-12}\bullet 10^{-1}=10^{-12-1}=10^{-13}$$

Was bedeuten die Zahlen oben rechts in der Anzeige des Taschenrechners?

5. Nur selten wird mit reine Zehnerpotenzen gerechnet. Was können Sie geschickt mit weiteren Zahlen machen? Auch hier ein Beispiel:

$$\begin{aligned}\frac{0.002\bullet 10^{5}\bullet 3{,}5\bullet 10^{-4}}{15\bullet 10^{3}} &= 0{,}002\bullet 3{,}5:15 \quad \bullet 10^{5}\bullet 10^{-4}\bullet 10^{-3}\\ &= 0{,}0004667 \quad \bullet 10^{5-4-3}\\ &= 4{,}667\bullet 10^{-4} \quad \bullet 10^{-2}\\ &= 4{,}667 \quad \bullet 10^{-6}\end{aligned}$$

Machen Sie es bei folgendem Beispiel genauso! $\frac{100\bullet 10^{-4}\bullet 2\bullet 10^{6}}{0{,}20\bullet 10^{3}}\bullet 0{,}0001=$

6. Benutzen Sie auch für das Beispiel aus 5. den Taschenrechner und notieren Sie Eingabe und Anzeige. Versuchen Sie einmal alles zusammen einzugeben und einmal in zwei Rechnungen aufzuteilen. Wie unterteilt man am besten?

7. Bei den folgenden Angaben kann die Zehnerpotenzschreibweise leicht vermieden werden, und das ohne viele Nullen! Wie?

Strecke Hagen-Hohenlimburg $8\bullet 10^{3}$ m, Ladung einer Batterie $1{,}2\bullet 10^{-3}$ kV, Stromstärke eines Weidezauns ~$200\bullet 10^{-3}$ A (maximal $1\bullet 10^{-3}$ kA), Durchmesser der kleinsten Bakterien $1\bullet 10^{-6}$ m

8. In technischen Formeln müssen die Einheiten immer berücksichtigt werden. Betrachten Sie das Beispiel in 5. und versuchen Sie die folgende Aufgabe ähnlich „auseinanderzunehmen": $I=\frac{2{,}3\cdot 10^{-1}\cdot \mathrm{mV}}{4\cdot 10^{-2}\cdot \mathrm{k\Omega}}=$

Ihr Ergebnis sollte in der Einheit Amper $\left[A=\frac{V}{\Omega}\right]$, der Einheit der Stromstärke I angegeben sein.

Besser im...

...Arbeiten mit Zehnerpotenzen und Einheiten

Vervollständigen Sie folgende Tabelle und beantworten Sie die Fragen:

ausgeschriebene Zahl	in 10ner Faktoren	Potenz	Vorsatz bei Einheiten	
1000000000			G	
1000000	10•10•10•10•10•10			
	10•10•10	10^3		
			h	Hekto
		10^0	-	Grundeinheit
0,1	$\frac{1}{10}$			
0,01			c	
	$\frac{1}{10 \bullet 10 \bullet 10}$	10^{-3}		
			μ	Mikro
		10^{-9}		Nano
0,000000000001			p	

Wie fasse ich mehrere Zehnerpotenzen zusammen?

(Merkformel: $10 \bullet 10 = 10$)

Wie gehe ich mit einer Zehnerpotenz im Nenner eines Bruches um?

(Merkformel: $\frac{1}{10} = 10$)

Stehen in einem Ausdruck Zahlen, Zehnerpotenzen und Einheiten gemeinsam, vereinfache ich, indem...

Wie gehe ich mit den Vorsätzen von Einheiten (Kilo, Milli usw.) um?

So berechne ich diese Aufgaben leicht mit dem Taschenrechner:

1.

2.

⋮

Jetzt kontrolliere ich meine bisherigen Ergebnisse und fülle den Selbstbeobachtungsbogen weiter aus!

9. Ordnen Sie folgende Geschwindigkeiten von der kleinsten zur größten! Passen Sie auf die Einheiten auf und begründen Sie Ihre Reihenfolge!

Schallgeschwindigkeit: 300 $m \bullet s^{-1}$

Lichtgeschwindigkeit: $300 \bullet 10^3$ $km \bullet s^{-1}$

Geschwindigkeit der Raumsonde Voyager 2: $5{,}4 \bullet 10^6$ $m \bullet h^{-1}$

Geschwindigkeit eines Formel-1-Wagens: 300 $km \bullet h^{-1}$

10. Finden Sie die Rechenfehler und erklären Sie diese!

$$\frac{2{,}5\text{mm}^2 \bullet 17\Omega}{250 \cdot \text{m}} = \frac{2{,}5\text{mm}^2 \bullet 17\Omega}{25000\text{mm}} = \frac{2{,}5\text{mm} \bullet 17\Omega}{25000} = 0.0017 mm\Omega = 0{,}0017 \bullet 10^{-6}\Omega = 1{,}7 \bullet 10^{-9}\Omega$$

Die richtige Lösung lautet $0{,}17\mu\Omega$m.

Jetzt kontrolliere ich meine bisherigen Ergebnisse und fülle den Selbstbeobachtungsbogen weiter aus!

11. Wandeln Sie folgende Angaben jeweils in eine Darstellung mit Grundeinheit um. Beispiel: 0,5kV = 500V

0,85kW, $750 \bullet 10^{-3}$mA, 220μV, $24M\Omega$, 6,5km, $12{,}4dm^3$

12. Schreiben Sie Ihre Ergebnisse aus 11. so wie ein Wissenschaftler besonders kleine und große Zahlen schreibt!

13. Berechnen Sie:

$0{,}0000000067 \bullet 40000 =$

$3{,}4 \bullet 10^{-3} \bullet 2{,}3 \bullet 10^{-3} =$

$5{,}7 \bullet 10^{-6} \bullet 73000000000 =$

$R = \frac{180\text{V}}{100 \cdot \text{mA}} =$

$U = 265\Omega \bullet 3 \bullet 10^{-1}\,A =$

1. Was muss eine sinnvolle Schreibweise für Sie erfüllen? Ist Sie leicht lesbar oder kurz oder ausführlich oder möglichst unkompliziert?

Denkbar wären zum Beispiel folgende Schreibweisen. Es gibt aber nicht **die einzig richtige** Lösung.

Masse der Erde	5974000000000000000000000000 g
	= $5974 \bullet 10^{24}$ g
	= $5{,}974 \bullet 10^{24}$ kg
	= $5{,}974 \bullet 10^{21}$ t
Ladung eines Elektrons	0,00000000000000000016726485 C
	= $1{,}6726485 \bullet 10^{-19}$ C
	= $1{,}6726485 \bullet 10^{-7}$ pC
Stärke einer Plastikfolie	0,00001m = 0,01mm = 10^{-2} mm = 10^{-5} m
Höhe einer Wohnungstür	2 m
Entfernung Erde-Sonne	149500000000m = 149500000km = $1{,}495 \bullet 10^{8}$ km

2. Durch die sogenannte genormte Zehnerpotenzdarstellung haben Wissenschaftler versucht, eine einheitliche Darstellung für besonders große oder besonders kleine Zahlen zu finden.
Die Schreibweise ist nicht immer sinnvoll, dies zeigen folgende Beispiele:
$5 \bullet 10^{2}$ g = 500g oder 0,25m = 25cm

3. Beim ersten Beispiel wurden die Exponenten 2 und 5 addiert. Beim zweiten Beispiel wurden die Exponenten 3 und (-4) addiert, also 3 + (-4) = 3 - 4.
Dies entspricht der allgemeinen Regel zum Multiplizieren von Potenzen. Wenn bei Potenzen die Basis, das ist in diesem Fall die Zahl 10, gleich ist, darf man zur Vereinfachung die Exponenten addieren. Daher kann man beim ersten Beispiel die 2 und die 5 addieren und beim zweiten Beispiel die 3 und die -4.
Im dritten Beispiel ist der zweite Faktor der Bruch $\frac{1}{10^2}$. Eine Potenz im Nenner eines Bruchs kann in den Zähler geschrieben werden, wenn man das Vorzeichen des Exponenten ändert: $\frac{1}{10^2} = 10^{-2}$.

So wird hier aus $\frac{1}{10^2} = \frac{10^0}{10^2} = 10^0 \bullet 10^{-2} = 10^{0-2} = 10^{-2}$ und die Regel zum Multiplizieren von Potenzen ist erneut anwendbar.

4. Anstatt der im Beispiel verwendeten Taste EE gibt es auf anderen Taschenrechnermodellen die Taste Exp. Auch ist es denkbar mit der y^x (oder x^y) zu arbeiten. Hierbei gilt bei der Eingabe: EE = •10 y^x.
Bei der ersten der beiden neuen Aufgaben steht folgendes als Ergebnis im Display: 1^{21}. Dies bedeutet $1 \bullet 10^{21}$, die 10 wird im Display nicht angezeigt. Bei der zweiten Aufgabe steht als Ergebnis im Display 1^{-13}. Auch hier wird die 10 im Display nicht angezeigt, genau wie bei der Eingabe von 10^{-12} im Display 1^{-12} steht.

5. In dem Beispiel wurde als erstes der Bruch aufgelöst. Hierzu wurde aus $\frac{1}{10^5} = 10^{-5}$. Außerdem wurden alle Zehnerpotenzen ans Ende des Produkts geschrieben. Das ist möglich, weil jedes Produkt kommutativ ist. Jetzt können die Zahlen einzeln multipliziert werden. Die Zehnerpotenzen haben alle dieselbe Basis 10. Daher können die Exponenten wie in Aufgab 3 addiert werden.
Bei dem anderen Beispiel könnte man wie folgt vorgehen, es gibt aber auch andere Möglichkeiten, die genauso richtig sind.

$$\begin{aligned}
\frac{100 \bullet 10^{-4} \bullet 2 \bullet 10^{6}}{0{,}20 \bullet 10^{3}} \bullet 0{,}0001 &= 100 \bullet 2 : 0{,}20 \bullet 0{,}0001 \quad \bullet 10^{-4} \bullet 10^{6} \bullet 10^{3} \\
&= 0{,}1 \quad \bullet 10^{-4+6+3} \\
&= 0{,}1 \quad \bullet 10^{5} \\
&= 1000
\end{aligned}$$

6. Zunächst wird zur Lösung der Aufgabe $\frac{0.002 \bullet 10^5 \bullet 3{,}5 \bullet 10^{-4}}{15 \bullet 10^3}$ alles zusammen eingegeben:

Eingabe	0,002	EE	5	•	3,5	EE	-4	:	15	:	1	EE	3	=
Anzeige	0,002	0,002	5	200	3,5	700		0,07	15	0,04667	1	1^{00}	1^{03}	0,000004667

Bei der folgenden Rechnung mit dem Taschenrechner wird die gleiche Aufgabe in eine Rechnung in Zahlen und eine Rechnung mit Zehnerpotenzen aufgeteilt:

Eingabe	0,002	•	3,5	:	15	=
Anzeige	0,002	0,002	3,5	0,007	15	0,0004667

Eingabe	1	EE	5	•	1	EE	-4	:	1	EE	3	=
Anzeige	1	1^{00}	1^{05}	100000	1	1^{00}	1^{-04}	10	1	1^{00}	1^{03}	0,01

Für die zweite Rechnung ist eigentlich gar kein Taschenrechner notwendig!
Die Ergebnisse werden miteinander multipliziert: 0,0004667•0,01 = 0,000004667
Mit welchem Rechenweg kommen Sie besser klar?

7. Die Zehnerpotenzen können durch das Verwenden von Vorsätzen wie Kilo oder Milli vor den Einheiten verwendet werden. Auch so können die Zahlen ohne viele Nullen geschrieben werden.
Strecke Hagen-Hohenlimburg $8 \bullet 10^{3}\,\text{m} = 8\,\text{km}$
Ladung einer Batterie $1{,}2 \bullet 10^{-3}\,\text{kV} = 1{,}2 \bullet 10^{-3} \bullet 10^{3}\,\text{V} = 1{,}2\,\text{V}$
Stromstärke eines Weidezauns $\sim 200 \bullet 10^{-3}\,\text{A} = 200 \bullet \text{mA}$ (maximal $1 \bullet 10^{-3}\,\text{mA} = 1\text{A}$)
Durchmesser der kleinsten Bakterien $1 \bullet 10^{-6}\,\text{m} = 1\mu\text{m}$

8. Die Einheiten können wie in Aufgabe 5 die Zehnerpotenzen ans Ende des Produkts gestellt werden. Außerdem können die Vorsätze in Zehnerpotenzen umgewandelt und so mit den übrigen Zehnerpotenzen verrechnet werden.

$$
\begin{aligned}
\frac{2{,}3 \cdot 10^{-1} \cdot \text{mV}}{4 \cdot 10^{-2} \cdot \text{k}\Omega} &= 2{,}3:4 & &\bullet 10^{-1} \bullet 10^{2} & &\bullet \text{mV} \bullet (\text{k}\Omega)^{-1} \\
&= 0{,}575 & &\bullet 10^{-1+2} & &\bullet 10^{-3}\,\text{V} \bullet \text{k}^{-1}\,\Omega^{-1} \\
&= 0{,}575 & &\bullet 10 \bullet 10^{-3} & &\bullet \text{V} \bullet 10^{-3}\,\Omega^{-1} \\
&= 0{,}575 & &\bullet 10^{-2} \bullet 10^{-3} & &\bullet \text{V} \bullet \Omega^{-1} \\
&= 0{,}575 & &\bullet 10^{-5} & &\bullet \text{A} \\
&= 5{,}75 & &\bullet 10^{-6} & &\bullet \text{A} \\
&= 5{,}75\mu\text{A}
\end{aligned}
$$

Probieren Sie auf Ihrem Taschenrechner einmal die ENG-Taste am Ergebnis aus. Sie wandelt immer in eine Potenz um, die einem Einheitenvorsatz entspricht. Das ist für Ingenieure und technische Aufgaben sehr praktisch. So können Zehnerpotenzen direkt in Vorsätze umgewandelt werden.

Vervollständigen Sie folgende Tabelle und beantworten Sie die Fragen:

ausgeschriebene Zahl	in 10ner Faktoren	Potenz	Vorsatz bei Einheiten	
1000000000	10•10•10•10•10•10•10•10•10	10^9	G	Giga
1000000	10•10•10•10•10•10	10^6	M	Mega
1000	10•10•10	10^3	K	Kilo
100	10•10	10^2	h	Hekto
1	1	10^0	-	Grundeinheit
0,1	$\frac{1}{10}$	10^{-1}	d	Dezi
0,01	$\frac{1}{10 \bullet 10}$	10^{-2}	c	Centi
0,001	$\frac{1}{10 \bullet 10 \bullet 10}$	10^{-3}	m	Milli
0,000001	$\frac{1}{10 \bullet 10 \bullet 10 \bullet 10 \bullet 10 \bullet 10}$	10^{-6}	µ	Mikro
0,000000001	$\frac{1}{10 \bullet 10 \bullet 10 \bullet 10 \bullet 10 \bullet 10 \bullet 10 \bullet 10 \bullet 10}$	10^{-9}	n	Nano
0,000000000001	$\frac{1}{10 \bullet 10 \bullet 10 \bullet 10 \bullet 10 \bullet 10 \bullet 10 \bullet 10 \bullet 10 \bullet 10 \bullet 10 \bullet 10}$	10^{-12}	p	Pico

Wie fasse ich mehrere Zehnerpotenzen zusammen?

Multipliziere ich zwei Zehnerpotenzen miteinander, so addiere ich die Exponenten. Die 10 bleibt als Basis stehen. (Merkformel: $10^{a} \bullet 10^{b} = 10^{a+b}$)

Wie gehe ich mit einer Zehnerpotenz im Nenner eines Bruches um?

Ich schreibe die Zehnerpotenz aus dem Nenner in den Zähler und ändere dabei das Vorzeichen des Exponenten. (Merkformel: $\frac{1}{10^{a}} = 10^{-a}$)

Stehen in einem Ausdruck Zahlen, Zehnerpotenzen und Einheiten gemeinsam, vereinfache ich indem...

ich erst alle Zahlen, dann alle Zehnerpotenzen und dann alle Einheiten schreibe. So kann ich jedes davon allein ausrechnen und die Einheiten umformen.

Wie rechne ich mit den Vorsätzen von Einheiten?

Vorsätze von Einheiten kann ich in Zehnerpotenzen umwandeln und mit verrechnen.

So berechne ich diese Aufgaben leicht mit dem Taschenrechner:

1. Ich trenne nach Faktoren, Zehnerpotenzen und Einheiten.
2. Die Faktoren multipliziere ich aus und erhalte eine Zahl.
3. Ich wandle alle Vorsätze von Einheiten in Zehnerpotenzen und fasse dann alle Zehnerpotenzen zusammen.
4. Ich multipliziere die in 2. erhaltene Zahl mit der Zehnerpotenz aus 3..

9. Um die Geschwindigkeiten ordnen zu können, müssen die Einheiten vergleichbar gemacht werden. Hierzu werden alle Einheiten zunächst in die Grundeinheiten Meter und Sekunden umgewandelt. Um h^{-1} in s^{-1} umzuwandeln, kann wie folgt vorgegangen werden: $\frac{1}{h} = \frac{1}{60\,\text{min}} = \frac{1}{60 \bullet 60s} = 1:3600s^{-1}$.

Schallgeschwindigkeit: $300\ m \bullet s^{-1}$

Lichtgeschwindigkeit: $300 \bullet 10^3\ km \bullet s^{-1} = 300 \bullet 10^6\ m \bullet s^{-1}$

Geschwindigkeit der Raumsonde Voyager 2:

$5{,}4 \bullet 10^6\ m \bullet h^{-1} = 5{,}4:3600 \bullet 10^6\ m \bullet s^{-1} = 0{,}0015 \bullet 10^6\ m \bullet s^{-1} = 1500\ m \bullet s^{-1}$

Geschwindigkeit eines Formel-1-Wagens:

$300\ km \bullet h^{-1} = 300:3600 \bullet 10^3\ m \bullet s^{-1} = 0{,}08333 \bullet 10^3\ m \bullet s^{-1} = 83{,}33\ m \bullet s^{-1}$

Damit ergibt sich folgende aufsteigende Reihenfolge von Geschwindigkeiten:

Formel-1-Wagen < Schall < Raumsonde Voyager 2 < Licht

10. Der erste Fehler besteht in der Umwandlung von 250m in Millimeter. Hier wurde eine Null vergessen: $250m = 250 \bullet 10^3 \bullet 10^{-3} \bullet m = 250 \bullet 10^3 mm = 250000mm$

Der zweite Fehler ist ein Folgefehler: Es muss $2{,}5 \bullet 17:250000 = 0{,}00017$ statt $2{,}5 \bullet 17:25000 = 0{,}0017$ gerechnet werden.

Der dritte Fehler wurde im Umgang mit den Einheiten begangen: Dort steht mmΩ. Dies bedeutet Millimeter mal Ohm, und nicht Milli-Milli-Ohm. Ein doppelter Vorsatz vor einer Einheit existiert nicht. Somit ergibt sich $0{,}00017 \bullet 10^{-3} m\Omega$.

$$\frac{2{,}5mm^2 \bullet 17\Omega}{250 \cdot m} = \frac{2{,}5mm^2 \bullet 17\Omega}{250000mm} = \frac{2{,}5mm \bullet 17\Omega}{250000}$$
$$= 0.00017 mm\Omega = 0{,}00017 \bullet 10^{-3} m\Omega = 0{,}17 \bullet 10^{-6} m \bullet \Omega = 0{,}17 \mu\Omega \bullet m$$

11. Es ergeben sich folgende Angaben in Grundeinheiten:

$0{,}85kW = 0{,}85 \bullet 10^3 W = 850W$

$750 \bullet 10^{-3} mA = 750 \bullet 10^{-3} \bullet 10^{-3} A = 750 \bullet 10^{-6} A$

$220\mu V = 220 \bullet 10^{-6} V$

$24M\Omega = 24 \bullet 10^6 \Omega = 24000000\Omega$

$6{,}5km = 6{,}5 \bullet 10^3 m = 6500m$

$12{,}4dm^3 = 12{,}4 \bullet 10^{-1} m^3 = 1{,}24m^3$

12. Wissenschaftler würden die Zahlen so schreiben:

0,85kW = $8{,}5 \bullet 10^{2}$ W

$750 \bullet 10^{-3}$ mA = $7{,}5 \bullet 10^{-4}$ A

220µV = $2{,}2 \bullet 10^{-4}$ V

24MΩ = $2{,}4 \bullet 10^{7}$ Ω

6,5km = $6{,}5 \bullet 10^{3}$ m

12,4dm³ = 1,24m³

13. Es ergeben sich die folgenden Ergebnisse. Diese sind auch mit dem Taschenrechner zu berechnen!

0,0000000067•40000

$= 6{,}7 \bullet 10^{-9} \bullet 4 \bullet 10^{4} = 6{,}7 \bullet 4 \bullet 10^{-9} \bullet 10^{4} = 26{,}8 \bullet 10^{-9+4} = 26{,}8 \bullet 10^{-5} = 0{,}000268$

$3{,}4 \bullet 10^{-3} \bullet 2{,}3 \bullet 10^{-3} = 3{,}4 \bullet 2{,}3 \bullet 10^{-3-3} = 7{,}82 \bullet 10^{-6} = 0{,}00000782$

$5{,}7 \bullet 10^{-6} \bullet 73000000000 = 5{,}7 \bullet 73000 = 416100$

$R = \frac{180\text{V}}{100 \cdot \text{mA}} = \frac{180\text{V}}{100 \bullet 10^{-3}\text{A}} = \frac{180\text{V}}{100 \cdot \text{A}} \bullet 10^{3} = 1{,}8 \bullet 10^{3}\,\Omega = 1{,}8\text{k}\Omega$

$U = 265\Omega \bullet 3 \bullet 10^{-1}\,\text{A} = 265 \bullet 3 \bullet 10^{-1}\,\Omega\text{A} = 79{,}5\text{V}$